

23/04/15

$A = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f: \text{συμμετρική}\} : \text{ένοστο αριθμητική συναρτήσεις.}$

$$\forall f, g \in A : (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{d|n} f(n/d)g(d) = \\ = \sum_{a \cdot b = n} f(a)g(b)$$

$$\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} \quad \text{Τότε: } f * \varepsilon = f = \varepsilon * f.$$

~~Πρόταση~~ Η αριθμ. συν/ση f καλείται ενεργειακά αντιστρέψιμη

$$(\Leftrightarrow) \exists \text{ αριθμ. συν/ση } g : f * g = \varepsilon = g * f \quad (1)$$

Αν μια τέτοια συνάρτηση g υπάρχει, τότε είναι μοναδική:

$$\text{Έστω ότι: } f * g' = \varepsilon = g' * f. \quad (2) \text{ Οδο } g = g'$$

$$(1) \Rightarrow f * g = \varepsilon \Rightarrow g' * (f * g) = g' * \varepsilon \Rightarrow (g' * f) * g = g' * \varepsilon \quad (2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon * g = g' \Rightarrow g = g'$$

Έτσι η μοναδική $g \in A$, αν υπάρχει, θα καλείται ενεργειακά αντιστροφή της f και θα συμβολίζεται με f^{-1} . Αυτός συμβαίνει ότι $(f^{-1}) \in A$ και $f * f^{-1} = \varepsilon = f^{-1} * f$.

Πρόταση: Η αριθμ. συνάρτηση f είναι ενεργειακά αντιστρέψιμη
 $(\Leftrightarrow) f(1) \neq 0$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ ~~Επειδή~~ Επειδή f ενεργ. αντιστρέψιμη $\Rightarrow \exists f^{-1} \in A$:
 $: f * f^{-1} = \varepsilon = f^{-1} * f$

$$\text{Τότε: } (f * f^{-1})(1) = \varepsilon(1) \Rightarrow \sum_{a \cdot b = 1} f(a)f^{-1}(b) = 1 \xrightarrow[\Rightarrow a=b=1]{a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(1)f^{-1}(1) = 1 \Rightarrow \boxed{f(1) \neq 0} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(1) = \frac{1}{f(1)}}$$

$$\text{Θ.δ.ο. } f * g = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Υποδ. ότι $f(1) \neq 0$. Ορίζουμε αντίσ. συναρτήσεις

$$g(m) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & m=1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{c \cdot d = m \\ c > 1}} f(c) g(d), & m > 1. \end{cases}$$

$$g(1) = \frac{1}{f(1)}, \quad g(2) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{c \cdot d = 2 \\ c > 1}} f(c) \cdot g(d) =$$

$$= -\frac{1}{f(1)} f(2) g(1) = \frac{-f(2)}{[f(1)]^2}$$

$$(f * g)(1) = \sum_{a \cdot b = 1} f(a) g(b) = f(1) g(1) = f(1) \cdot \frac{1}{f(1)} = 1 = \varepsilon(1)$$

$$(f * g)(2) = \sum_{a \cdot b = 2} f(a) g(b) = f(1) g(2) + f(2) g(1) =$$

$$= f(1) \cdot \frac{[-f(2)]}{f^2(1)} + f(2) \cdot \frac{1}{f(1)} = 0 = \varepsilon(2).$$

Εμψ. Υπόθεση : $(f * g)(k) = \varepsilon(k) = 0$ αν $2 \leq k < n$.

$$\text{Θ.δ.ο. } (f * g)(n) = 0 (= \varepsilon(n))$$

$$(f * g)(n) = \sum_{a \cdot b = n} f(a) g(b) = f(n) \cdot g(1) + \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) g(b) =$$

$$= f(n) \cdot g(1) + \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) \left[\sum_{\substack{c \cdot d = b \\ d > 1}} f(c) g(d) \right] =$$

$$= f(n) \cdot g(1) - \frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) \cdot \left[\sum_{\substack{c \cdot d = b \\ d > 1}} f(c) \cdot g(d) \right] =$$

$$= f(n) g(1) - \frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) \left[\sum_{c \cdot d = b} f(c) g(d) - f(1) g(b) \right] =$$

$$= f(n) g(1) - \frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) \cdot [(f * g)(b) - f(1) g(b)] =$$

$$= f(n) g(1) - \frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) \cdot (f * g)(b) + \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) g(b) =$$

$$= (f * g)(n) - \frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{a \cdot b = n \\ b > 1}} f(a) \cdot (f * g)(b) \quad (*)$$

$$= (f * g)(n) - \frac{1}{f(1)} \cdot f(1) \cdot (f * g)(n) = (f * g)(n) - (f * g)(n) = 0 = \varepsilon(n).$$

$$(*) (f * g)(b) = 0, \forall b: b > 1 \text{ και } b < n.$$

$$\text{Άρα } f * g = \varepsilon = g * f. \Rightarrow \boxed{g = f^{-1}}$$

$$\text{Έστω } \mathcal{U} = \left\{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(1) \neq 0 \right\} \subseteq A.$$

↳ σύνολο όλων των ενελκτικά αντιστρέψιμων ευρέων.

Αν $f \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists f^{-1}$ και f^{-1} δίνεται:

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)}, & n=1 \\ -\frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{c \cdot d = n \\ c, d > 1}} f(c) g(d), & n > 1. \end{cases}$$

Παραύπηση: Αν $f, g \in \mathcal{U}$ τότε $n(f * g) \in \mathcal{U}$.

$$(f * g)(1) = f(1) \cdot g(1) \neq 0, \text{ διότι } f(1) \neq 0 \text{ και } g(1) \neq 0. \\ (f, g) \in \mathcal{U}.$$

$$\text{Τότε } \exists (f * g)^{-1} \text{ και } (f * g)^{-1} = g^{-1} * f^{-1} = f^{-1} * g^{-1} \\ \text{διότι η πράξη "}" είναι ανυποκαταστάσιμη.}$$

$$\text{Είναι: } (f * g) * (g^{-1} * f^{-1}) = \underbrace{f * g * g^{-1}}_f * f^{-1} = \underbrace{f * \varepsilon}_f * f^{-1} = \\ = f * f^{-1} = \varepsilon.$$

Παρόμοια: $(g^{-1} * f^{-1}) * (f * g) = \varepsilon.$

$$f \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{U} \text{ και } (f^{-1})^{-1} = f.$$

Πολυλειτουργικές Συναρτήσεις

Ορισμός: Μια αριθμητική συνάρτηση $f \in A$ καλείται
πολυλειτουργική $\Leftrightarrow f \neq 0$ και $\forall n, m \in \mathbb{N}$:
 $(n, m) = 1 \Rightarrow f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$

$$\text{Έστω } M = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ πολ/κική}\} \subseteq A$$

Παρατήρηση: ~~M~~ $M \subseteq U \subseteq A$

$$\begin{aligned} \text{Έστω } f \in M &\stackrel{\text{op}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: f(n) \neq 0. \text{ Τότε: } f(n) = f(1 \cdot n) = \\ &= f(1) \cdot f(n) \xRightarrow{f(n) \neq 0} f(1) = 1 \neq 0. \\ &\quad \downarrow \\ &\quad (1, n) = 1 \\ &\quad f \text{ πολ/κική} \end{aligned}$$

Παράδειγμα: ① $N^k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, N^k(n) = n^k$ (k : οποιδήποτε $k \in \mathbb{N}$)

$$\text{Τότε: } N^k \neq 0 \text{ διότι } N^k(1) = 1^k = 1 \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \forall n, m \in \mathbb{N}: N^k(n \cdot m) &= (n \cdot m)^k = n^k \cdot m^k = \\ &= N^k(n) \cdot N^k(m) \end{aligned}$$

Άρα N^k πολ/κική δηλ $N^k \in M$.

② $\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k}, & \text{αν } n = \underbrace{p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}}_{\text{πρωτ. αντίστοιχα}} \end{cases}$
Συνάρτηση Liouville.

$$\lambda \neq 0, \text{ διότι: } \lambda(1) = 1.$$

$$\text{Έστω } n, m \in \mathbb{N} \text{ και } (n, m) = 1. \text{ Θ. Σ. Ο. } \lambda(n \cdot m) = \lambda(n) \cdot \lambda(m).$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Αν } n=1 \text{ ή } m=1, \text{ τότε: } \lambda(n) \text{ ή } \lambda(m) &= 1 \text{ και τότε} \\ \lambda(n \cdot m) &= \lambda(1 \cdot m) = \lambda(m) = \lambda(1) \cdot \lambda(m) = \\ &\quad (\text{αν } n=1) \qquad \qquad \qquad = \lambda(m) \cdot \lambda(m). \end{aligned}$$

$$- \text{ Αν } m=1 \text{ τότε όμοια } \lambda(n \cdot m) = \lambda(n) \cdot \lambda(m).$$

• $n, m > 1$

Έστω $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ πρωτογενής ανάλυση του n
 $m = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$ // - // - m .

Επειδή $(n, m) = 1 \Rightarrow p_i \neq q_j \Rightarrow n \cdot m = \underbrace{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}}_{\text{πρωτ. ανάλυση του } n \cdot m} \quad \left. \vphantom{n \cdot m} \right\} 2)$

$\Rightarrow \lambda(n \cdot m) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \beta_1 + \dots + \beta_l} =$
 $= (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} \cdot (-1)^{\beta_1 + \dots + \beta_l} = \lambda(n) \cdot \lambda(m) \Rightarrow \lambda \in M$

③ $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(n) = \eta \lambda \theta \sigma \varsigma$ θετικών διαίρεσών του n .

• $T(1) = 1 \neq 0 \Rightarrow T \neq 0$.

• Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ με $(n, m) = 1$

- Αν $n=1$ τότε $T(n \cdot m) = T(1 \cdot m) = T(m) = T(1) \cdot T(m) =$

- Πάρομοι αν $m=1 \Rightarrow \boxed{1 = T(n) \cdot T(m)}$
 $\Rightarrow T(n \cdot m) = T(n) \cdot T(m)$

• Αν $n, m > 1$: Τότε $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ // πρωτογενής
 $m = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$ // ανάλυση.

Τότε $n \cdot m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$ // πρωτ. ανάλυση του $n \cdot m$.

~~$T(n) = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 + \alpha_k)$~~
 $T(n) = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 + \alpha_k)$
 $T(m) = (1 + \beta_1) \cdot (1 + \beta_2) \cdot \dots \cdot (1 + \beta_l)$
 $T(n \cdot m) = (1 + \alpha_1) \cdot \dots \cdot (1 + \alpha_k) \cdot (1 + \beta_1) \cdot \dots \cdot (1 + \beta_l) = T(n) \cdot T(m) \quad \left. \vphantom{T(n \cdot m)} \right\} 2)$

$\Rightarrow T: \pi_0 \mathbb{Z} / \mathbb{N}$

④ $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}: g(n) = n!$

Είναι: $g(1) = 1! = 1 \neq 0 \Rightarrow g \neq 0$.

Δείχνουμε $n=2$

$m=3 \Rightarrow$ Τότε $(n, m) = 1 \Rightarrow g(2 \cdot 3) = g(6) = 6! = 720$

$g(n) \cdot g(m) = g(2) \cdot g(3) = 2! \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12 \neq g(6)$

Άρα g όχι πολλαπλ. ($g \notin M$)

(5) $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : \mu(n) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \exists P: \text{πρώτος} : P^2/n. \\ (-1)^k, & n=p_1 \dots p_k \end{cases}$
 (Συνάρτηση Möbius)

πρωτ. συνάρτηση.

Θ.δ.ο. $\mu \in M$.

• $\mu(1) = 1 \Rightarrow \mu \neq 0$.

• Έστω $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ με $(n, m) = 1$.

Θ.δ.ο. $\mu(n \cdot m) = \mu(n) \cdot \mu(m)$

— Αν $n=1$ ή $m=1$ όπως και προηγουμένως παραδείγματα
 έχουμε ότι $\mu(n \cdot m) = \mu(n) \cdot \mu(m)$.

— Έστω $n, m > 1 \Rightarrow \left. \begin{matrix} n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \\ m = q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \forall i, j: p_i \neq q_j \Rightarrow$
 என此, $(n, m) = 1$

$\Rightarrow n \cdot m = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} \dots q_l^{\beta_l}$
 πρωτ. συνάρτηση.

• Αν $\exists P: \text{πρώτος} : P^2/n \Rightarrow \mu(n) = 0$. Όπως $P^2/n \cdot m \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mu(n \cdot m) = 0$.

Άρα $\mu(n \cdot m) = 0 = 0 \cdot \mu(m) = \mu(n) \cdot \mu(m)$.

Παρόμοια αν $\exists P: \text{πρώτος} : P^2/m$.

— Έστω ότι $\nexists P: \text{πρώτος} : P^2/n \Rightarrow \mu(n) = (-1)^k$
 — — — — — $: P^2/m \Rightarrow \mu(m) = (-1)^l$

Τότε $\nexists P: \text{πρώτος} : P^2/n \cdot m$. Τυχαίνει αν $\exists P$ πρώτος:
 $P^2/n \cdot m$ τότε $n \cdot m = P^2 \cdot x, x \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow P/n$ ή P/m
 πρώτος

Έστω ότι P/n . Τότε $n = P \cdot y, y \in \mathbb{N}$.

Τότε: $\frac{n}{P} \cdot m = P \cdot x \Rightarrow P/n/p$ ή P/m
 $P: \text{πρώτος}$

Αν P/m என此, $P/n \Rightarrow \mu(n, m) = 1$ Απονο αφορ
 $P: \text{πρώτος}$

Άρα $P/n/p \Rightarrow \frac{n}{P} = P \cdot z \Rightarrow n = P^2 z \Rightarrow P^2/n$ Απονο

Πρόταση Καταλήγει σε άρνηση του P/m.

Αρα $\exists P$: πρώτος, ώστε $P^2/m \Rightarrow \mu(n \cdot m) = (-1)^{k+1} = (-1)^k (-1)^1 =$
 ~~$\phi(n) \phi(m)$~~ $= \mu(n) \cdot \mu(m)$.

Πρόταση: Έστω $f \in M$ και $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N} : (d_i, d_j) = 1, \forall i \neq j$
και $i, j = 1, \dots, n$.

$$\text{Τότε } f(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n) = f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \dots \cdot f(d_n).$$

Απόδειξη: - Αν $n=2$ τότε από τον ορισμό ~~$f(d_1 \cdot d_2) = f(d_1) \cdot f(d_2)$~~
αφού $f \in M$ και $(d_1, d_2) = 1$.

- Έναρξ. Υπόθεση: $(d_i, d_j) = 1, 1 \leq i \neq j \leq n \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(d_1 \cdot \dots \cdot d_n) = f(d_1) \cdot \dots \cdot f(d_n)$

- Έστω $d_1, d_2, \dots, d_{n+1} \in \mathbb{N}$ και $(d_i, d_j) = 1, 1 \leq i \neq j \leq n+1$.

$$- f(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_{n+1}) = f((d_1 \cdot \dots \cdot d_n) \cdot d_{n+1}) \stackrel{(*)}{=} f(d_1 \cdot \dots \cdot d_n) \cdot f(d_{n+1}) =$$

Εναρξ. υποθέτ.

$(*)$ Έστω $(d_1 \cdot \dots \cdot d_n, d_{n+1}) = d$. Αν $d > 1 \Rightarrow \exists P$: πρώτος: $P|d \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} P|d_1 \cdot \dots \cdot d_n \\ P|d_{n+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{πρώτος} \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} P|d_i \\ \end{array} \right\} \text{για κάποιο } i=1, \dots, n.$

$$\Rightarrow P|(d_i, d_{n+1}) = 1 \text{ Απόρροή } \Rightarrow \boxed{d=1}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $n = P_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot P_k^{\alpha_k}$ η πρωτογενής ανάλυση
του $n > 1$. Τότε $\forall f \in M$:

$$f(n) = f(P_1^{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot f(P_k^{\alpha_k})$$

Απόδ.: $\forall i, j = 1, \dots, k (i \neq j)$ ισχύει $(P_i^{\alpha_i}, P_j^{\alpha_j}) = 1$
αφά από την υπόθεση: Έχουμε το ζητούμενο.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $f, g \in M$. Τότε: $f = g \Leftrightarrow \forall P$: πρώτος και
 $\forall \alpha \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$f(P^\alpha) = g(P^\alpha)$$

Απόδ. $\Rightarrow$ Αν $f = g$ η συνθήκη είναι προφανής.

($\Leftarrow$) Θ.δ.ο. $f(n) = g(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Αν $n=1$ τότε: $f(1) = 1 = g(1)$ (επειδή $f, g \in M$)

- ~~Αν~~ Αν $n > 1$ και $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$: now we can.

Τότε:

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}) \stackrel{\text{νόμος 1}}{=} f(p_1^{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot f(p_k^{\alpha_k}) \stackrel{\text{νόμος 2}}{=}$$

$$= g(p_1^{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot g(p_k^{\alpha_k}) = g(n)$$

$\forall \alpha \quad f(n) = g(n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad \alpha \quad f = g$

$\Rightarrow$

Πρόβλημα: Έστω $f, g \in M$

① Η συνάρτηση $f \cdot g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$
είναι νότιμη.

② Αν $g(n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση

$\frac{f}{g}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $(f/g)(n) = f(n)/g(n)$ είναι
νότιμη.

Απόδ.: ① $f, g \in M \Rightarrow f(1) = 1 = g(1)$ και $(f \cdot g)(1) = 1 = 1 \cdot 1 = f(1) \cdot g(1) = 1 \neq 0$
και $f \cdot g \neq 0$.

- Αν $m, n \in \mathbb{N}$ $f \in M$ $(m, n) = 1$ τότε: $(f \cdot g)(m \cdot n) =$
 $= f(m \cdot n) \cdot g(m \cdot n) \stackrel{f, g \in M}{=} f(m) f(n) \cdot g(m) g(n) =$
 $= [f(m) \cdot g(m)] [f(n) \cdot g(n)] =$
 $= (f \cdot g)(m) \cdot (f \cdot g)(n)$

② (όμοια)

$M \subseteq U \subseteq A$

Να πειστούν ότι Αν $f, g \in U \Rightarrow f^{-1} \in U, (f * g) \in U$

Θ.δ.ο. $f, g \in M \Rightarrow \begin{cases} f^{-1} \in M \\ f * g \in M. \end{cases} \quad // \quad (u, *) : \text{τοποειδής} \\ (M, *) \text{ ομότιμη}$